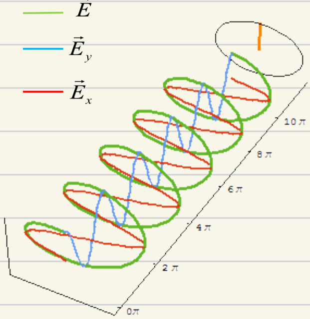
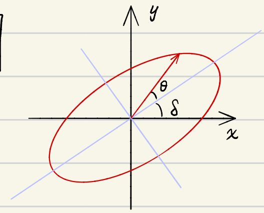
椭圆偏振光



线偏振光 $\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}$ & 圆偏振光 $\begin{bmatrix}1 \\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$



$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_0^x e^{i(kz-wt)} = E_0\cos\theta\, e^{i(kz-wt)} \\ E_y(z,t) = E_0^y e^{i(kz-wt+\delta)} = E_0\sin\theta\, e^{i(kz-wt+\delta)} \end{cases}$$

可看成是两个相互垂直的简谐运动的合成

但振幅不等或相位差不等于$\pm\frac{\pi}{2}$

琼斯矢量

$$\begin{bmatrix}E_x(z,t) \\ E_y(z,t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_0^x \\ E_0^y e^{i\delta}\end{bmatrix} e^{i(kz-wt)} = E_0 \begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\delta}\end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}$$

$\delta=\pi$	δ位于第三象限	$\delta=-\frac{\pi}{2}$	δ位于第四象限	$\delta=0$
$\delta=0$	δ位于第一象限	$\delta=\frac{\pi}{2}$	δ位于第二象限	$\delta=\pi$

推广

框架

↓

遍历

↓

打破框架

从框架遍历到打破框架

$$\begin{bmatrix}E_x(z,t) \\ E_y(z,t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_0^x \\ E_0^y\end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}$$

$\begin{bmatrix}E_0^x \\ E_0^y\end{bmatrix}$ 取遍任意复数 $\Longrightarrow$ 椭偏光

含时振荡 $\Longrightarrow$ 自然光

$$\begin{cases} E_x(z,t) \to E_x(x,y,z,t) \\ E_y(z,t) \to E_y(x,y,z,t) \end{cases}$$

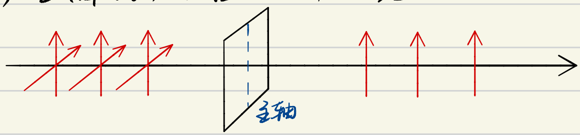
具有轨道角动量的光：LG光束、Gauss光束

偏振的应用

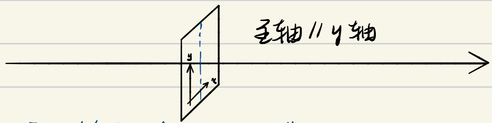
偏振片

- 作用
- 性质
- 矢量描述 系统

产生偏振光，检测偏振光



偏振片存在一个主轴，它的作用是过滤掉入射光中电场方向与主轴垂直的光，只透过电场方向（偏振方向）和主轴平行的光.



偏振片的作用

（实数/复数/含时随机振荡）

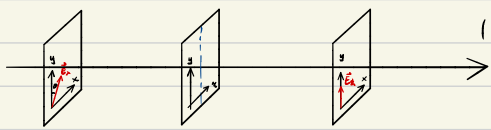
入射光的琼斯矢量 $\begin{bmatrix} E_0^x \\ E_0^y \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{偏振片}}$ 出射光 $\begin{bmatrix} 0 \\ E_0^y \end{bmatrix}$

矩阵描述（琼斯矩阵）~ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ （前提：主轴 // y 轴）

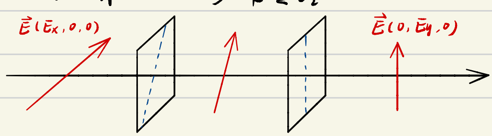
能量视角

马吕斯定律 $I_{出} = A_{出}^2 = (A_{入}\cos\theta)^2 = A_{入}^2\cos^2\theta = I_{入}\cos^2\theta$

（θ 光的偏振方向与主轴夹角）



推广：主轴1和入射光偏振夹角为 θ_1；
主轴2和主轴1夹角是 θ_2



马吕斯定律 $I_2 = I_1\cos^2\theta_2 = I_0\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2$

二向色性

基本原则

光在介质中的传播性质，完全由光和介质的Q的相互作用决定

极端情况

① 光和介质的Q没有相互作用（光不能激发Q的运动）

光视介质为真空

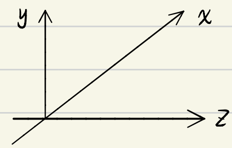
② 光和Q有相互作用，且Q的损耗 $\sim\infty$

光不能在介质中传播

二向色性：同一介质中整合了以上两个极端情况

系统

设介质的Q是如下情况



各向异性 $\begin{cases}\text{沿 } x \text{ 方向无法振动，无法被激发} \\ \text{沿 } y \text{ 方向有很强的损耗}\end{cases}$

波动方程

$$\begin{tikzcd} \vec{E} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r] & \vec{Q} \arrow[dl] \\ \vec{B} & \end{tikzcd} \xRightarrow{z\text{方向传播的光}} \begin{tikzcd} E_x \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r] & Q_x \arrow[dl] \\ B_y & \end{tikzcd} \ \& \ \begin{tikzcd} E_y \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r] & Q_y \arrow[dl] \\ B_x & \end{tikzcd}$$

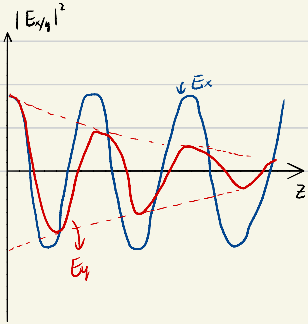
二维偏振波动方程：Q振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_x = \infty \cdot u_x + E_x \quad \Rightarrow \quad u_x = \dot{u}_x = 0 \\ \partial_t^2 u_y = k u_y + E_y - \gamma_y \dot{u}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 E_x = c^2 \partial_z^2 E_x \\ \partial_t^2 E_y = v^2 \partial_z^2 E_y \quad (v = v_r + i v_i) \end{cases}$$

波函数

$$\begin{cases} E_x = E_0^x e^{i(kz-ckt)} \\ E_y = E_0^y e^{i(kz-v_r kt)} e^{-|k_i| z} \end{cases}$$



性质

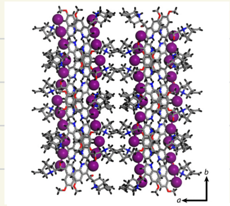
入射光中 { 沿 x 方向偏振的部分 ⇒ 完美透过
沿 y 方向偏振的部分 ⇒ 完全吸收(过滤)

⇒ 偏振片　主轴沿 x 方向

真实系统中的实现

自然界中的系统

eg ~ 生物大分子

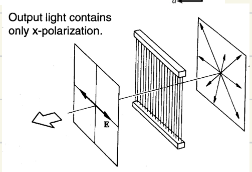


沿 a 方向：基本无运动，不被激发

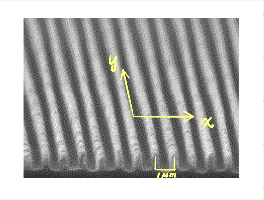
沿 b 方向：可运动、有吸收

宏观的例子

eg ~ 人造材料



微观的例子

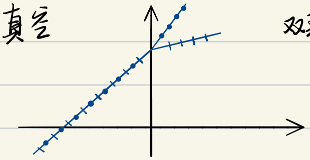


双折射

机制

名词解释

真空　　双折射介质

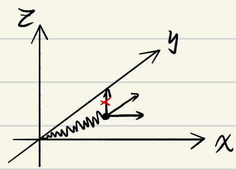


- 物理过程：见上图
- 语言描述：TE和TM模式的光发生不同的折射现象

物理系统

- 光：平面波
- 介质：有各向异性的α（e.g. 电偶极子）
- Example：模型特点 ① 电偶极子，类比为弹簧振子

  ② 有各向异性 $\begin{cases} x\text{-}y\ \text{平面内可振动} \\ \text{沿}\ z\ \text{方向不能振动} \end{cases}$



电偶极子的运动方程
$$\begin{cases} m\ddot{u}_x = ku_x + E_x \\ m\ddot{u}_y = ku_y + E_y \\ u_z = \dot{u}_z = 0 \end{cases}$$

波动方程

- 对偶场：$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$，$\vec{E} \to \alpha$，$\alpha \to \vec{B}$　　$\{\vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t),\ \underline{\alpha(\vec{r},t)}\}$ → $\vec{p}(\vec{r},t)$
- 耦合关系：
  - ○ 库仑定律 $\begin{cases} m\ddot{u}_x = ku_x + E_x \\ m\ddot{u}_y = ku_y + E_y \\ u_z = \dot{u}_z = 0 \end{cases}$
  - ○ M4　$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon\partial_t\vec{E} + \vec{J}$
  - ○ M3　$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$
- 解耦合：（见下页）

$$\mu_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \partial_t^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y^2+\partial_z^2 & -\partial_x\partial_y & -\partial_x\partial_z \\ -\partial_x\partial_y & \partial_z^2+\partial_x^2 & -\partial_y\partial_z \\ -\partial_x\partial_z & -\partial_y\partial_z & \partial_x^2+\partial_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

波动方程

波动方程

- 对偶场
- 耦合关系
- 解耦合

$\vec{E}$ 是平面波

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{bmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \\ E_z(\vec{r},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}$$

求解 u

$$m \begin{bmatrix} \ddot{u}_x(\vec{r},t) \\ \ddot{u}_y(\vec{r},t) \end{bmatrix} = -mw_0^2 \begin{bmatrix} u_x(\vec{r},t) \\ u_y(\vec{r},t) \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{q}{m(w_0^2-w^2)} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)} = \frac{q}{m(w_0^2-w^2)} \begin{bmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \end{bmatrix}$$

电流密度 $\vec{J} = n_e q \dot{\vec{u}}$

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} J_x(\vec{r},t) \\ J_y(\vec{r},t) \\ J_z(\vec{r},t) \end{bmatrix} = n_e q \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} = n_e q \begin{bmatrix} \alpha \dot{E}_x \\ \alpha \dot{E}_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_e q\alpha & 0 & 0 \\ 0 & n_e q\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix}$$

M4

$\nabla\times\vec{B} = \mu(\vec{J}+\varepsilon\partial_t\vec{E})$

$$\vec{\nabla}\times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \partial_t \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mu_0 \left(\varepsilon_0 \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_e q\alpha & 0 & 0 \\ 0 & n_e q\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mu_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} \quad (\varepsilon_1 = n_e q\alpha)$$

M3 & M4

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{\varepsilon}\partial_t\vec{E} \end{cases}$$

其中

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

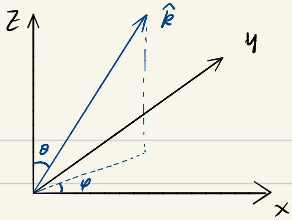
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \mu_0\vec{\varepsilon}\partial_t^2\vec{E}^2 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\vec{\varepsilon}\partial_t^2\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \vec{\nabla}(\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) - (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\vec{E}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_x^2 E_x + \partial_x\partial_y E_y + \partial_x\partial_z E_z \\ \partial_x\partial_y E_x + \partial_y^2 E_y + \partial_y\partial_z E_z \\ \partial_x\partial_z E_x + \partial_y\partial_z E_y + \partial_z^2 E_z \end{bmatrix} - (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2) \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_y^2-\partial_z^2 & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_z \\ \partial_x\partial_y & -\partial_x^2-\partial_z^2 & \partial_y\partial_z \\ \partial_x\partial_z & \partial_y\partial_z & -\partial_x^2-\partial_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mu_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \partial_t^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y^2+\partial_z^2 & -\partial_x\partial_y & -\partial_x\partial_z \\ -\partial_x\partial_y & \partial_z^2+\partial_x^2 & -\partial_y\partial_z \\ -\partial_x\partial_z & -\partial_y\partial_z & \partial_x^2+\partial_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}}$$

波动方程



$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = |k| \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

求解波函数

预解式代入波动方程

① 验证预解式的函数形式满足方程（平面波解 $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$）

② 求出参数制约关系

- 参数 $\{(E_x^0, E_y^0, E_z^0), (k_x, k_y, k_z), \omega\} \Rightarrow (|E|, \hat{E}, |k|, \hat{k}, \omega)$
- 目标制约关系（谁依赖谁）
  - 自由参数 $(\omega, \hat{k}) \Rightarrow$ 考察给定频率给定方向的光
  - 被制约参数 $|E|, \hat{E}, |k|$

预解式

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = |E| \begin{bmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_y \\ \hat{E}_z \end{bmatrix} e^{i(|k|\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

代入波动方程

$$LHS = \mu_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \partial_t^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = (-\omega^2)\mu_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -\mu_0\omega^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} \partial_y^2+\partial_z^2 & -\partial_x\partial_y & -\partial_x\partial_z \\ -\partial_x\partial_y & \partial_z^2+\partial_x^2 & -\partial_y\partial_z \\ -\partial_x\partial_z & -\partial_y\partial_z & \partial_x^2+\partial_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_y^2+k_z^2 & -k_xk_y & -k_xk_z \\ -k_xk_y & k_z^2+k_x^2 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k_x^2+k_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$LHS = RHS$

$$\mu_0\omega^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_0+\varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_0+\varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = |k|^2 \begin{bmatrix} 1-\sin^2\theta\cos^2\varphi & -\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & -\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ -\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & 1-\sin^2\theta\sin^2\varphi & -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

齐次线性方程组的非平庸解

制约关系 $(|E|, \hat{E}, |k|)$ 依赖 $(\hat{k}(\theta,\varphi), \omega)$

齐次方程整理成

↓

$$\overleftrightarrow{J} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{求出依赖关系}$$

方法：

$$\mu_0\omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} = |k| \overleftrightarrow{k} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\mu_0\omega^2 (\overleftrightarrow{k})^{-1} \overleftrightarrow{\varepsilon}}_{\text{矩阵}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = |k| \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |k|$ 是矩阵 $\mu_0\omega^2(\overleftrightarrow{k})^{-1}\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 的本征值

$\begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mu_0\omega^2(\overleftrightarrow{k})^{-1}\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 的本征矢

$\Rightarrow$ 得到 $|k|$ 和 $\begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix}$ 关于 $(\omega, \theta, \varphi)$ 的依赖关系（见下页）

电场波函数

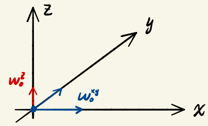
$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} e^{i(|k|\hat{k}\cdot\vec{r} - wt)} = |E| \begin{bmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_y \\ \hat{E}_z \end{bmatrix} e^{i(|k|\hat{k}\cdot\vec{r} - wt)}$$

$\mu_0 w^2 (\overleftrightarrow{\varepsilon})^{-1}$ 的本征值 & 本征态：

$$|k_1| = \frac{w\sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}}{c} \qquad \vec{E}_1 \propto \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|k_2| = \frac{w}{c}\sqrt{\frac{2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1\cos 2\theta}} \qquad \vec{E}_2 \propto \begin{bmatrix} \varepsilon_0\cos\theta\cos\varphi \\ \varepsilon_0\cos\theta\sin\varphi \\ -(\varepsilon_0+\varepsilon_1)\sin\theta \end{bmatrix}$$

物理诠释：在双折射介质中，给定 $(w, \hat{k})$ 的光它的偏振方向只能取2个特定的方向 $\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \varepsilon_0\cos\theta\cos\varphi \\ \varepsilon_0\cos\theta\sin\varphi \\ -(\varepsilon_0+\varepsilon_1)\sin\theta \end{bmatrix}$
同时不同偏振方向对应的 $|k|$ 是不同的

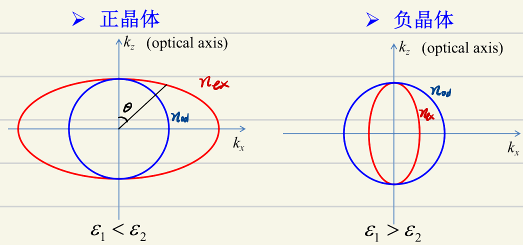


⇒ 介电常数 $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xy} & & \\ & \varepsilon_{xy} & \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$

双折射的性质和现象

性质

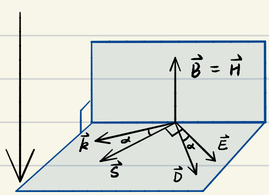
介质的性质	光学中，介质的性质由折射率唯一描述
	双折射 ⟺ 双折射率 ⟺ 介质中存在两个折射率
回顾折射率的定义	$n = \frac{c}{v_p} = \frac{c}{\omega}\lvert k\rvert \propto \lvert k\rvert$
双折射晶体 { 正常光	$n_{od} = \frac{c}{\omega}\lvert k_{od}\rvert = c\sqrt{\mu_0 \varepsilon_{xy}}$
反常光	$n_{ex} = \frac{c}{\omega}\lvert k_{ex}\rvert = c\sqrt{\frac{2\mu_0\varepsilon_{xy}\varepsilon_z}{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_z+(\varepsilon_z-\varepsilon_{xy})\cos 2\theta}} \xrightarrow[\text{光沿主轴传播}]{\theta=0} c\sqrt{\mu_0\varepsilon_{xy}}$
⇒	光在介质中传播，可能感受到两种折射率，依赖于光的偏振
反射光的折射率依赖于波矢方向(θ)	



当光沿主轴(即z轴)传播时，反常光退化为正常光，即 $n_{ex}(\theta=0) = n_{od}(\theta=0)$

传播光的性质和现象

光的性质	传播方向、偏振方向、传播速度、光的强度
传播方向和偏振方向	传播方向 { 波矢方向 $\vec{k}$
	能流方向 $\vec{S} \propto \vec{E}\times\vec{H}$（能流方向是真正的传播方向）
	偏振方向 $\vec{E} \oplus \vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$



电场方向 ⟷ 传播方向
电场方向 ↕ 磁场方向
磁场方向 ⟷ 传播方向

$\vec{E}$. $\vec{D}$ ⟷ $\vec{k}$. $\vec{S}$
$\vec{E}$. $\vec{D}$ ↕ $\vec{B}$. $\vec{H}$
$\vec{B}$. $\vec{H}$ ⟷ $\vec{k}$. $\vec{S}$

推导 出发点	Maxwell's Equations & 平面波解

① $\vec{E}$、$\vec{D}$ 由 $\vec{D} = \tilde{\varepsilon}\vec{E}$ ⇒ $\vec{D}$与$\vec{E}$不平行，夹角为α $|\vec{D}\cdot\vec{E}| = |E||D|\cos\alpha$ ⇒ $\cos\alpha = \frac{|\vec{D}\cdot\vec{E}|}{|D||E|}$

② $\vec{B}$、$\vec{H}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$，在一般介质中 $\mu = \mu_0 = 1$ ⇒ $\vec{B} = \vec{H}$

③ 4个Maxwell方程

M1: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho = 0$ ⇒ $(i\vec{k})\cdot\vec{D} = 0$ ⇒ $\vec{k}\cdot\vec{D} = 0$ $\quad \vec{k}\perp\vec{D}$

M2: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ ⇒ $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$ $\quad \vec{k}\perp\vec{D}$

M3: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$ ⇒ $(i\vec{k})\times\vec{E} = i\omega\vec{B}$ ⇒ $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$ $\quad \vec{B}\perp\vec{k} \quad \vec{B}\perp\vec{E}$

M4: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \partial_t\vec{D}$ ⇒ $(i\vec{k})\times\vec{H} = -i\omega\vec{D}$ ⇒ $\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ $\quad \vec{D}\perp\vec{k} \quad \vec{D}\perp\vec{H}$

④ 能流 $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ ⇒ $\vec{S}\perp\vec{E} \quad \vec{S}\perp\vec{H}$

传播速度

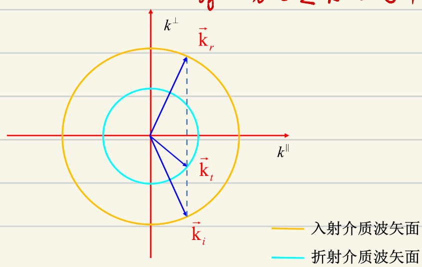
群速度 v.s. 相速度

定义

- 相速度（相位的速度） $\vec{v}_p = \frac{\omega}{|k|}\cdot\hat{k}$
- 群速度 ⇒ 能流方向 $\vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}}\,\omega(\vec{k}) = (\partial_{k_x}\omega(\vec{k}), \partial_{k_y}\omega(\vec{k}), \partial_{k_z}\omega(\vec{k}))$

$\vec{v}_g$ 的方向是 $\vec{k}$ 空间中等频面的法线方向

基于波矢中的等频面进行讨论



波矢匹配 $k_i^{\parallel} = k_r^{\parallel} = k_t^{\parallel} = k^{\parallel}$

波矢匹配判断波的方向
- 相速度方向：$\hat{k}$
- 群速度方向（能流方向）：相应 k 点的等频率面法向

Δ 波矢匹配适用于所有波动

正常光和反常光的等频面
- 正常光
- 反常光

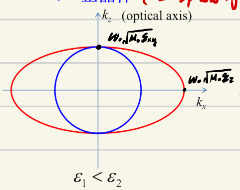
$\omega(k_x, k_y, k_z) = \omega_0$

$|k_{od}| = \omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_{xy}} \Rightarrow \boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega_0^2\mu_0\varepsilon_{xy}}$ 等频面方程

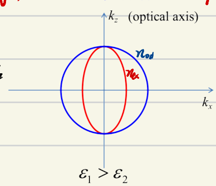
$|k_{ex}| = \omega_0\sqrt{\frac{2\varepsilon_{xy}\varepsilon_z}{\varepsilon_{xy} + \varepsilon_z + (\varepsilon_z - \varepsilon_{xy})\cos 2\theta}} \Rightarrow \boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2\omega_0^2\varepsilon_{xy}\varepsilon_z}{\varepsilon_{xy} + \varepsilon_z + (\varepsilon_z - \varepsilon_{xy})\cos 2\theta}}$

θ 是 $\hat{k}$ 与 z 轴的夹角 $k_z = |k|\cos\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2k_z^2}{|k|^2} - 1$

➢ 正晶体（正常晶体）



➢ 负晶体（反常晶体）

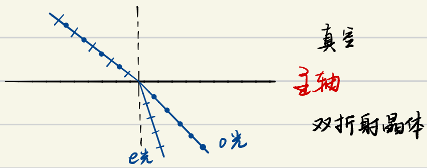


正常晶体 $\varepsilon_{xy} < \varepsilon_z \Rightarrow |k|_{od} \le |k|_{ex} \Rightarrow |v_p|_{od} \ge |v_p|_{ex}$

正常晶体中正常光跑得快

现象 光在双折射晶体表面的折射

系统



目标 求出双折射晶体中正常光和反常光的折射角

出发点 波矢定向等频面的波矢匹配条件

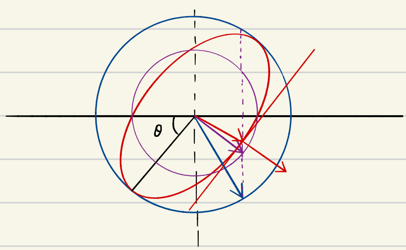
步骤

① 定义坐标系：沿袭入射问题中的定义

② 分别画出入射光和正常折射光、反常折射光的等频面

③ 根据波矢匹配条件确定正常折射光和反常折射光的波矢方向

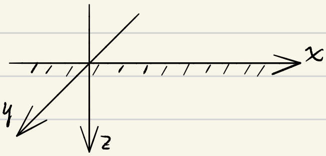
④ 根据等频面进一步确定反常光的能流方向（真折射方向）



双折射晶体介面处的折射

折射的物理图像

系统



界面处的折射和反射

入射光激发界面上的Q做受激振荡 ⇒ Q辐射次级波

⇒ 次级波相长/相消干涉

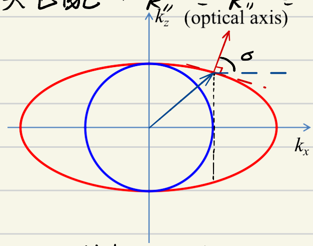
$$\begin{cases} \ddot{x} = k_x x + E_x^{in} \\ \ddot{y} = k_y y + E_y^{in} \end{cases}$$

(双折射晶体表面的) 折射的定量描述

原则

波矢匹配：$k_\parallel^{in} = k_\parallel^{od} = k_\parallel^{ex}$

反常光的等频率面



$$\sigma = \arctan \frac{\varepsilon_{xy} k_0^x}{\varepsilon_z k_0^z}$$

$$|k|_{ex} = w_0 \sqrt{\frac{2\mu_0 \varepsilon_{xy} \varepsilon_z}{\varepsilon_{xy} + \varepsilon_z + (\varepsilon_z - \varepsilon_{xy})\cos 2\theta}}$$

$$k_z = |k|\cos\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2k_z^2}{|k|^2} - 1$$

$$\Rightarrow |k|^2 \left[\varepsilon_{xy} + \varepsilon_z + (\varepsilon_z - \varepsilon_{xy}) \left(\frac{2k_z^2}{|k|^2} - 1 \right) \right] = 2\mu_0 w_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_z$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_z)|k|^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_{xy})(2k_z^2 - |k|^2) = 2\mu_0 w_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_z$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{xy}(k_x^2 + k_y^2) + \varepsilon_z k_z^2 = \mu_0 w_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_z$$

$$\Rightarrow \frac{k_x^2 + k_y^2}{\mu_0 w_0^2 \varepsilon_z} + \frac{k_z^2}{\mu_0 w_0^2 \varepsilon_{xy}} = 1$$

hint:

① $|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

② $|k|\cos\theta = k_z$